TD Suites

VR6 **Exercice 1** Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie donner une preuve, sinon, donner un contre-exemple.

1. Si la suite (u_n^2) converge, la suite (u_n) converge.
2. Si $\frac{u_n}{1+u_n^2} \to 0$ alors $u_n \to 0$.
3. Si $(u_n + v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) convergent.
4. Si (u_n) et $(u_n + v_n)$ convergent, alors (v_n) converge.
5. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
6. Si $(\lfloor u_n \rfloor)$ converge, (u_n) converge.
7. Si (u_n) converge, $(\lfloor u_n \rfloor)$ converge.
8. Une suite positive de limite nulle est décroissante APCR.
9. Si $\lim u_n = 0$, $\lim(1+u_n)^n = 1$.
10. Si $u_n \to 0$, alors $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \to 0$.
11. Si $u_{n+1} - u_n \to 0$, alors (u_n) converge.
12. Si $u_n \to +\infty$, alors $u_{2n} - u_n$ n'est pas majorée.
13. Si $u_n + v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$ ou $v_n \to +\infty$.
14. Si $\sin u_n \to 0$, alors (u_n) converge vers un réel $\ell \in \pi\mathbb{Z}$.
15. Si $u_n \to +\infty$, alors (u_n) est croissante APCR.
16. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) admet une suite extraite tendant vers $+\infty$.

S4Z **Exercice 2** En mettant en facteur les termes dominants, étudier la limite des suites

1. $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
2. $\frac{3^n-2^n}{(-5)^n+2^n}$
3. $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}$
4. $\sqrt{n^2+n+1} - n$
5. $\big((-3)^n + 2^n\big)\big((-2)^{-n} + 3^{-n}\big)$
6. $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$

3UJ **Exercice 3** Étudier la limite éventuelle des suites

1. $\frac{\sqrt{n}\sin(n^2) - 3\cos^3(n)}{n}$
2. $\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $\frac{n}{E(\sqrt{n})}$
4. $\sqrt[n]{3+\sin n}$
5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$
6. $\frac{n!}{n^n}$
7. ★ $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$
8. ★ $\sqrt[n]{n!}$

Utilisation de la définition en ε

3NT **Exercice 4** Soit $(u_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang.

ZHM **Exercice 5** Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, avec $\ell > 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
2. Montrer que $u_n \to +\infty$. **Indication** : *Raisonner par l'absurde.*

IOT **Exercice 6** Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.
2. On suppose que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

6D4 **Exercice 7** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer que (u_n) admet un minimum.

RXW **Exercice 8** Soit (x_n) une suite de réels.

1. Montrer que si $x_{n+1} - x_n \to \ell$, alors $\frac{x_n}{n} \to \ell$. **Indication** : *Appliquer Cesàro.*
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 0$ et $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \ell$. Montrer que $\sqrt[n]{x_n} \to \ell$.
3. Déterminer les limites éventuelles des suites $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ et $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

FVH **Exercice 9** ★ Soit (u_n) une suite postitive vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n \to 0$.

J19 **Exercice 10** ★ Soit $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

1. Montrer que $f(n) \to +\infty$.
2. On suppose que $\frac{f(n)}{n} \to L$. Montrer que $L = 1$.
3. La limite précédente existe-t-elle toujours ?

OKG **Exercice 11** ★ ★ Convergence au sens de Cesàro Soit (a_n) une suite réelle positive majorée. Montrer que $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \to 0$ si et seulement s'il existe une partie $A \subset \mathbb{N}$ telle que $\frac{|A \cap [\![1,n]\!]|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, n \notin A \Rightarrow a_n \leq \varepsilon$.

Études pratiques

8TL **Exercice 12** Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $E(a^n)^{1/n}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}_+$.

DBQ **Exercice 13** Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $u_n v_n \to 1$. Montrer que $u_n \to 1$ et $v_n \to 1$.

VDC **Exercice 14** Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\left(\sin\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\cos n\right)^n$.

QQ8 **Exercice 15** On suppose $u_n \to \ell$, $v_n \to \ell'$. Montrer que $\max(u_n, v_n) \to \max(\ell, \ell')$ converge.

JBB **Exercice 16** Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$.

YTL **Exercice 17** Étudier la limite de $\sin(\pi\sqrt{n^2+b})$.

M4M **Exercice 18** Soit $a_1, \ldots, a_m > 0$. Montrer que $$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^n\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max_{1\leq i\leq m} a_i.$$

Convergence monotone

ACT **Exercice 19** Soit (u_n) une suite minorée telle que $u_n + (\tan u_n)^2$ converge.

1. Montrer que (u_n) est majorée.
2. Montrer que $(\tan^2 u_n)$ est bornée.
3. On suppose que $(\tan u_n)$ est croissante. Montrer que (u_n) converge.

G1S **Exercice 20** 🍃 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que $u_n \to +\infty$.
3. ★ Déterminer la limite de $u_{n+1}^2 - u_n^2$. En utilisant le théorème de Cesàro, montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$, c'est-à-dire $\frac{u_n}{\sqrt{2n}} \to 1$.

IH3 **Exercice 21** 🍃 On considère les suites définies par $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
   On admet que leur limite est $e = e^1$.
2. Montrer que leur limite est irrationnelle.
   Indication : *Procéder par l'absurde et écrire l'encadrement de la limite pour un n bien choisi.*

Z09 **Exercice 22** ★ Soit (u_n) une suite réelle positive vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{u_{n+1}+u_n}{3}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \max(u_n, u_{n+1})$. Montrer que (v_n) est décroissante.
2. Montrer que $v_n \to 0$, puis que $u_n \to 0$.

Valeurs d'adhérences

7R4 **Exercice 23** 🍃

1. Vérifier que la composée de deux extractrices est une extractrice. La suite $(u_{(\varphi\circ\psi)(n)})$ est-elle extraite de $(u_{\varphi(n)})$ ou de $(u_{\psi(n)})$?
2. Soient (a_n), (b_n) deux suites bornées. Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que $(a_{\varphi(n)})$ et $(b_{\varphi(n)})$ convergent.

R30 **Exercice 24** Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que (u_n) ne tend pas vers ℓ si et seulement s'il existe $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell' \neq \ell$ et une suite (v_n) extraite de (u_n) tels que $v_n \to \ell'$.

7AD **Exercice 25** ★ Soit $x \in \mathbb{R}$ irrationnel. Soit $(p_n), (q_n)$ deux suites d'entiers telles que $\frac{p_n}{q_n} \to x$. Montrer que $|p_n|, |q_n| \to \infty$.

M57 **Exercice 26** ♣ Suites de Cauchy On dit que (u_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| < \varepsilon$.

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
3. ★ Montrer que toute suite de Cauchy est convergente.
   Indication : *Utiliser une caractérisation en termes de valeurs d'adhérences.*

EZY **Exercice 27** Limites inférieure et supérieure Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\alpha_n = \inf\{u_k,\ k \geq n\} \quad \text{et} \quad \beta_n = \sup\{u_k,\ k \geq n\}.$$

1. Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

On note $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$, appelée limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $\beta = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$ sa limite supérieure.

2. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\alpha = \beta$.
3. Montrer que β est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).
   En particulier, on a démontré le théorème de Bolzano-Weierstrass.

S5Y **Exercice 28** ♣ Suites sous-additives Soit (u_n) une suite positive vérifiant $\forall p, q \in \mathbb{N},\ u_{p+q} \leq u_p + u_q$.

1. Montrer que $\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$ admet une borne inférieure m.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $C_q \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \geq q, \quad \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q} + \frac{C_q}{n}.$$

   Indication : *Utiliser une division euclidienne.*
3. En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers m.

JD0 **Exercice 29** Soit u une suite réelle vérifiant $\lim u_{n+1} - u_n = 0$ Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

OD5 **Exercice 30** On considère une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$.

1. Justifier que si $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ à partir du rang n_0, et que $x \geq u_{n_0}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n \to +\infty$. Montrer que $\{u_n - v_m,\ n, m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.
4. Montrer que $\{\sin \ln(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

OOF **Exercice 31** ★ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $u_n + \frac{u_{2n}}{2} \to 1$. Montrer que (u_n) converge.

XH3 **Exercice 32** ★ ★ Montrer que l'on peut extraire une suite monotone de toute suite réelle.